Corso di Laurea in Fisica, Analisi (Canale D-K) 20-21
Prof. Galise
Esercitazione 2

Esercizio 1 Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

$$\frac{2x^2-3}{x^4-5x^2+4}\,, \qquad \frac{3x^2+2}{x^4-4x^2+5}\,, \qquad \frac{10^x}{2\sin x-1}\,, \qquad \frac{10^x-100}{\sin x+2}\,, \qquad \frac{1}{|x+2|\sqrt{x^2+2x-15}}\,,$$

$$\cos(\pi\, x^2)\,, \qquad \tan(\pi\, x^2)\,, \qquad \sqrt{12+2^x-4^x} \qquad \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)+1}+\sqrt{\arcsin\left(\log_3(x^2+1)\right)}\,,$$

$$\log_\pi\left(\frac{\log_2 x+2}{\log_2^2 x-1}\right)\,, \qquad |\arcsin x|^{1+\log_{\frac{1}{4}}|x|}\,, \qquad (\arccos(2^x-3))^{\sqrt{4^{2x}+2\cdot 4^x-3}}\,, \qquad \left(\frac{x-1}{1-|x+1|}\right)^{|x|}+\sqrt{\arctan(9-x^2)}$$

$$\sqrt{\arcsin(\sqrt{x}-x)}\cdot(\arctan x)^{\sqrt{x+1}}\,, \qquad \arccos|3^{2x}-3^x+1|+\arcsin\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)\,.$$

N.B. Per l'insieme di definizione di funzioni della forma $f(x)^{g(x)}$ si ricorda quanto segue: detto $I\subseteq\mathbb{R}$ l'insieme di definizione di f e $J\subseteq\mathbb{R}$ quello di g, allora l'insieme di definizione di f^g è dato da

$$\{x\in I\cap J\;:\;f(x)>0\}\,.$$

Ciò deriva dalla validità della formula $f(x)^{g(x)}=a^{g(x)\log_a f(x)}$, dove a è un qualsiasi numero reale positivo diverso da 1.

Esercizio 2 Disegnare i grafici delle funzioni seguenti

$$f(x)=|x-3|+1, \qquad g(x)=1+\cos(x-\frac{\pi}{2}), \qquad h(x)=|3-4x-x^2|.$$

Esercizio 3 Scrivere la funzione composta $h=f\circ g$ e $k=g\circ f$ nei seguenti casi:

(i) $f(x)=x+1\,,\qquad g(x)=x^2-2x;$
(ii) $f(x)=x^2\,,\qquad g(x)=\sqrt{x}\,,\quad x\geq 0.$

Esercizio 4 Data la funzione $f(x)=x^3$, disegnare il grafico di

$$f_0(x)=f(x)+1, \qquad f_1(x)=f(x)-1, \qquad f_2(x)=f(x+2), \qquad f_3(x)=f(x-2), \qquad f_4(x)=3\,f(x),$$
$$f_5(x)=f(3x), \qquad f_6(x)=f_0(-x) \qquad f_7(x)=-\,f_0(x), \qquad f_8(x)=|f_0(x)|, \qquad f_9(x)=f_0(|x|).$$

[Osservare che le ultime 4 funzioni dipendono da f_0 e non da f].

Esercizio 5 Sia $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-2$. Dopo aver dimostrato che è invertibile determinare esplicitamente la funzione inversa.

Esercizio 6 Mostrare **usando la definizione** la validità di

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n^2+3n}=0, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}=1.$$

Esercizio 7 Siano x_n, y_n due successioni convergenti a x_0 e y_0 rispettivamente. Si provi che la successione

$$z_n=\max\{x_n,y_n\}$$

è convergente e se ne determini il limite.

Esercizio 8 Calcolare il limite delle seguenti successioni

$$\frac{3\,n^3+2\,n+1}{4\,n^4+3\,n^3+2}, \qquad \frac{3^n+n}{n^3+1}, \qquad n^2\,2^{-n}, \qquad \frac{3^n}{2^n+4^n},$$

$$\frac{3^n}{n^{100}}, \qquad \frac{4\,n^4-n^3+4\,n^2}{2\,n^4+3}, \frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}, \qquad \frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}, \qquad \sqrt{n^2+n}-n$$

$$\frac{3^n-n^2}{2^n+n^5}, \qquad \sqrt[n]{\frac{n+3}{n}}, \qquad \frac{\sqrt{n^2-n+1}-2\,n}{n+1},$$

Esercizio 9 Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della successione

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n^\alpha+2}$$

Esercizio 10 1)Dimostrare che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l > 1$ allora definitivamente la successione è strettamente maggiore di 1.
2) Costruire una successione a_n che converge a 1 con infiniti termini strettamente maggiori di 1 e infiniti termini strettamente minori di 1.